Wahrscheinlichkeit - Zusammenfassung

Zufallsexperiment:
Versuch mit zufälligem Ausgang bzw. Ergebnis.
Beispiele: Münzwurf, Würfel, Glücksrad.

Laplace Experiment:
Spezielles Zufallsexperiment, bei dem alle möglichen Ausgänge gleich wahrscheinlich sind.
Beispiele: Münzwurf mit idealer Münze, idealer Würfel, Glücksrad mit gleich großen Sektoren.

Bernoulli-Experiment:
Spezielles Zufallsexperiment, bei dem es nur zwei verschiedene Ausgänge gibt.
Beispiele: Münzwurf (W, Z), Würfel (z.B. 4, keine 4), Glücksrad mit zwei Sektoren.

Bernoulli-Kette:
Spezielles Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experiments besteht. Bezeichnung: Bernoulli-Kette der Länge n.

Baumdiagramme und Pfadregeln:
<u>Pfadmultiplikationsregel:</u>
Im Baumdiagramm erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Pfades, indem man die Wahrscheinlichkeiten seiner Teilstrecken multipliziert.
<u>Pfadadditionsregel:</u>
Wenn zu einem Ereignis mehrere Pfade gehören, dann ist die Wahrscheinlichkeit die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade.
<u>Komplementärregel:</u>
Für ein Ereignis A und sein Gegenereignis $\overline{A}$ gilt: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Binomialverteilung:
Gilt für eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an. Die Wahrscheinlichkeit für k Treffer beträgt:

$$P(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Anzahl der Pfade mit k Treffern}} \cdot \underbrace{p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{\text{Wahrscheinlichkeit für einen Pfad mit k Treffern}} \qquad \text{(Formel von Bernoulli)}$$

Gehorcht eine Zufallsvariable der Formel von Bernoulli, heißt die Zufallsvariable binomialverteilt.
Schreibweise: X ist $B(n,p)$ – verteilt.

Erwartungswert einer Zufallsvariablen:
<u>Allgemein:</u>
$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + ... + x_n \cdot P(X = x_n)$$
Dabei sind x_i die möglichen Werte der Zufallsvariablen X und $P(X = x_i)$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.
Beispiel:
Einmaliges Ziehen einer Münze aus einem Beutel mit 2x 10Cent, 1x 20Cent, 2x 1€
Die Zufallsvariable X beschreibt den bei vielen Ziehungen zu erwartenden Geldbetrag pro Ziehung.
Erwartungswert: $E(X) = 0{,}1€ \cdot \frac{2}{5} + 0{,}2€ \cdot \frac{1}{5} + 1€ \cdot \frac{2}{5} = 0{,}84€$
Also: Bei einer großen Zahl von Durchführungen des obigen Zufallsexperiments ist durchschnittlich pro Ziehung 0,84€ zu erwarten

<u>Binomialverteilung:</u>
$$E(X) = n \cdot p$$

Wahrscheinlichkeit - Zusammenfassung

Berechnung verschiedener Wahrscheinlichkeiten:

Ereignis	**Berechnung**
Genau k Erfolge	$P(X=k)$
Höchstens k Erfolge	$P(X\le k)$
Weniger als k Erfolge	$P(X<k)=P(X\le k-1)$
Mehr als k Erfolge	$P(X>k)=1-P(X\le k)$
Mindestens k Erfolge	$P(X\ge k)=1-P(X\le k-1)$
Mindestens a und höchstens b Erfolge	$P(a\le X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a-1)$

Taschenrechnerbefehle für die Binomialverteilung:

Berechnung von $P(X=k)$ über Taschenrechnerbefehl: $\mathrm{binom}\underline{\mathrm{p}}\mathrm{df}(n,p,k)$

Berechnung von $P(X\le k)$ über Taschenrechnerbefehl: $\mathrm{binom}\underline{\mathrm{c}}\mathrm{df}(n,p,k)$

Testen binomialverteilter Zufallsvariablen:

Man wählt als Gegenhypothese H_1 das, was man vermutet oder bestätigt haben will,
als Nullhypothese H_0 das, was abgelehnt werden soll.
Tipp: Nimm für die Nullhypothese H_0 die Stelle im Text, die ein Gleichheitszeichen für eine Wahrscheinlichkeit enthält.

Drei Fragestellungen können auftreten:
(1) Trefferanzahl k gesucht
(2) Trefferanzahl k zu prüfen
(3) Irrtumswahrscheinlichkeit P gesucht

Beispielaufschrieb zu (1):

$H_0: p\ge 0{,}1 \quad H_1: p<0{,}1$ (linkseitiger Test)
X = Anzahl der Patienten
X ist bei wahrer Nullhypothese im Extremfall $B(100;0{,}1)-$ verteilt.
$P(X\le k)\le 0{,}05$

k	$P(X\le k)$
5	0,0576
4	0,0237

$\Rightarrow \boxed{k=4}$
Ablehnungsbereich für H_0: $[0;4]$

	H_0 wird angenommen	H_0 wird abgelehnt
H_0 ist in Wirklichkeit wahr	Entscheidung, H_0 anzunehmen, ist richtig	Fehler 1. Art
H_0 ist in Wirklichkeit falsch	Fehler 2. Art	Entscheidung, H_0 zu verwerfen, ist richtig